

工程电磁场数值计算

Numerical Techniques in Electromagnetics

李旭光

上海交通大学 电子信息与电气工程学院

电气工程系 电机与电器教研室



电磁场及其数学模型

1. 麦克斯韦方程组
2. 波动方程和电磁位函数
3. 边值问题
4. 电磁场数学模型分类
5. 电磁场数值计算

麦克斯韦方程组的微分形式

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$



麦克斯韦方程组的积分形式

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV$$



$$\begin{cases} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = J_x + \frac{\partial D_x}{\partial t} \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = J_y + \frac{\partial D_y}{\partial t} \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z + \frac{\partial D_z}{\partial t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial H_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial H_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial H_z}{\partial t} \end{cases}$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho$$



$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = J_r + \frac{\partial D_r}{\partial t} \\
 \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = J_\varphi + \frac{\partial D_\varphi}{\partial t} \\
 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} = J_z + \frac{\partial D_z}{\partial t}
 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_r}{\partial t} \\
 \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = -\mu \frac{\partial H_\varphi}{\partial t} \\
 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rE_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t}
 \end{array} \right.$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rB_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rD_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial D_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho$$



$$\begin{cases} \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta H_\varphi) - \frac{\partial H_\theta}{\partial \varphi} \right] = J_r + \frac{\partial D_r}{\partial t} \\ \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi) \right] = J_\theta + \frac{\partial D_\theta}{\partial t} \\ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r H_\theta) - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right] = J_\varphi + \frac{\partial D_\varphi}{\partial t} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta E_\varphi) - \frac{\partial E_\theta}{\partial \varphi} \right] = -\mu \frac{\partial H_r}{\partial t} \\ \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) \right] = -\mu \frac{\partial H_\theta}{\partial t} \\ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta) - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right] = -\mu \frac{\partial H_\varphi}{\partial t} \end{cases}$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 B_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta B_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 D_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta D_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial D_\varphi}{\partial \varphi} = \rho$$



一般媒质边界条件

$$E_{1t} = E_{2t}$$

$$H_{1t} - H_{2t} = J_S$$

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_S$$

$$B_{1n} = B_{2n}$$

$$J_{1n} - J_{2n} = -\frac{\partial \rho_S}{\partial t}$$



两种理想媒质的边界条件

$$E_{1t} = E_{2t}$$

$$H_{1t} = H_{2t}$$

$$D_{1n} = D_{2n}$$

$$B_{1n} = B_{2n}$$



理想媒质与理想导体的边界条件

$$\vec{E}_2 = \vec{D}_2 = \vec{B}_2 = \vec{H}_2 = 0$$

$$\vec{a}_n \times \vec{E}_1 = 0$$

$$\vec{a}_n \times \vec{H}_1 = \vec{J}_S$$

$$\vec{a}_n \cdot \vec{D}_1 = \rho_s$$

$$\vec{a}_n \cdot \vec{B}_1 = 0$$

$$\nabla_\tau \cdot \vec{J}_S = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t}$$



有源区

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \frac{\nabla \rho}{\varepsilon}$$
$$\nabla^2 \vec{H} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = -\nabla \times \vec{J}$$



无源区

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$
$$\nabla^2 \vec{H} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$



洛伦茨规范

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\mu\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J}$$

$$\nabla^2 \phi - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$



洛伦茨规范. 简易解法

$$\phi(r, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\rho\left(r', t - \frac{R}{v}\right)}{R} dV'$$

$$\vec{A}(r, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J}\left(r', t - \frac{R}{v}\right)}{R} dV'$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$



库伦规范.静态场

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0$$

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}$$

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{V'} \frac{\rho(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

$$\vec{A}(r) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J}(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$



边值问题的分类

- 第一类边值问题（或狄利克莱（Dirichlet）问题），这类问题是已知全部边界上的电位分布，如导体表面上的电位；
- 第二类边值问题（或纽曼（Neumann）问题），这类问题是已知边界上电位的法向导数，如已知导体表面上的电荷分布；
- 第三类边值问题，又称混合边值问题(或劳平（Robin）问题），这类问题是已知一部分边界上的电位分布及另一部分边界上电位的法向导数。如已知部分导体表面上的电位和部分导体表面上的面电荷密度。



边值问题的分类

- 第一类边值问题（或狄利克莱（Dirichlet）问题），这类问题是已知全部边界上的电位分布，如导体表面上的电位；
- 第二类边值问题（或纽曼（Neumann）问题），这类问题是已知边界上电位的法向导数，如已知导体表面上的电荷分布；
- 第三类边值问题，又称混合边值问题(或劳平（Robin）问题），这类问题是已知一部分边界上的电位分布及另一部分边界上电位的法向导数。如已知部分导体表面上的电位和部分导体表面上的面电荷密度。



边值问题的分类

- 第一类边值问题（或狄利克莱（Dirichlet）问题），这类问题是已知全部边界上的电位分布，如导体表面上的电位；
- 第二类边值问题（或纽曼（Neumann）问题），这类问题是已知边界上电位的法向导数，如已知导体表面上的电荷分布；
- 第三类边值问题，又称混合边值问题(或劳平（Robin）问题），这类问题是已知一部分边界上的电位分布及另一部分边界上电位的法向导数。如已知部分导体表面上的电位和部分导体表面上的面电荷密度。



边值问题的解法

- 解析法
- 近似法
- 图解法
- 数值法



边值问题的解法

- 解析法
- 近似法
- 图解法
- 数值法



边值问题的解法

- 解析法
- 近似法
- 图解法
- 数值法



边值问题的解法

- 解析法
- 近似法
- 图解法
- 数值法



边值问题的解析法求解

- 分离变量法
- 镜像法
- 复变函数法
- 格林函数法



边值问题的解析法求解

- 分离变量法
- 镜像法
- 复变函数法
- 格林函数法



边值问题的解析法求解

- 分离变量法
- 镜像法
- 复变函数法
- 格林函数法



边值问题的解析法求解

- 分离变量法
- 镜像法
- 复变函数法
- 格林函数法



$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

$$\phi(x, y, z) = X(x) Y(y) Z(z)$$

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + k_x^2 X = 0$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + k_y^2 Y = 0$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + k_z^2 Z = 0$$



$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

$$\phi(r, \varphi, z) = R(r)\Phi(\varphi)Z(z)$$

$$\frac{1}{rR} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2 \Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0$$

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} + (k^2 r^2 - m^2)R = 0$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + p^2 \Phi = 0$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + k_z^2 Z = 0$$



按边界条件分

- 边值问题
- 初值问题



按方程形式分

- 积分方程
- 微分方程
 - 常微分方程
 - 偏微分方程



- 时域方法

- 时域积分方程法IETD
- 时域有限元法FETD
- 时域有限差分法FDTD

- 频域方法

- 低频方法
 - 有限元法FEM
 - 有限差分法FDM
 - 矩量法MoM
- 高频方法



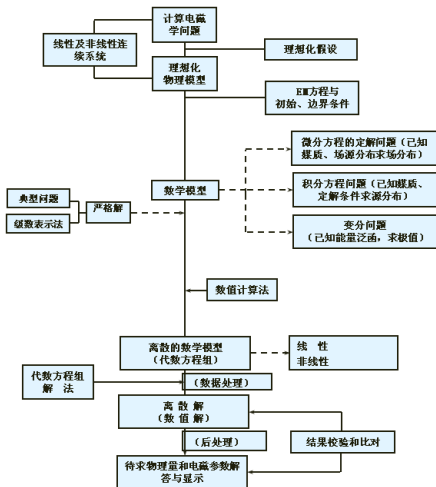


图 1: 电磁场数值计算流程



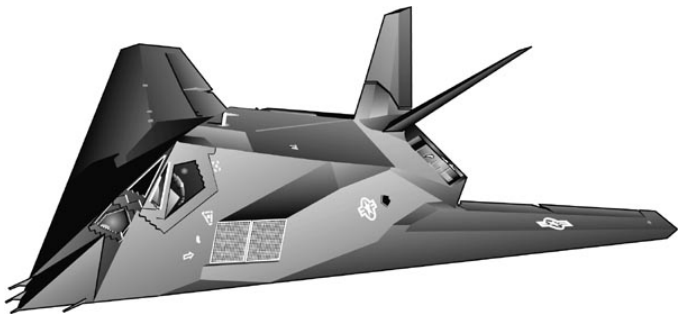


图 2: F117隐形飞机

F117隐形飞机原理之一

- 为最大可能地达到隐身效果，F-117A隐形战机采用多面体外形设计。由于雷达探测范围一般在飞机水平面上下30度的角度内，因此F-117A的大多数表面与垂直面的夹角均大于30度，这样可以把雷达波上下偏转出去，以避开辐射源。另一方面，F-117A的前后缘被设计得尖锐笔直，机体表面其它边缘设计成与主波束方向一致，对方雷达接收不到连续的信号，难以确定该飞机是一个实在目标还是一种瞬变噪声。
- F-117A隐形战斗轰炸机的全动V型尾翼和机翼均采用菱形翼剖面设计，2台发动机装入机体内部，进气口采用特殊的复合材料格栅设计，可保证进气口对10长或更长的雷达波的隐身效果。这种格栅进气口同时还具有向发动机提供均匀气流的优点，从而使F-117A更适应大仰角和侧滑飞行。



F117隐形飞机原理之二

- F-117A的发动机尾喷口设计采用展向“开缝”式喷口设计，喷口下缘底面阻止红外探测器及雷达从后面探测到涡轮部件。发动机排出的气流能够与从发动机旁经过的冷空气迅速混合，使排气速下降到66摄氏度，这样即可以有效地降低发动机的红外辐射特征。这种埋入式发动机设计及特殊的进，排气设计可有效降低发动机噪声。
- F-117A机体材料以铝合金结构为主，整体外表涂满黑色的磁性铁氧体雷达吸波材料，可以有效地吸收高频率雷达波或低频率雷达波，增强隐形效果。



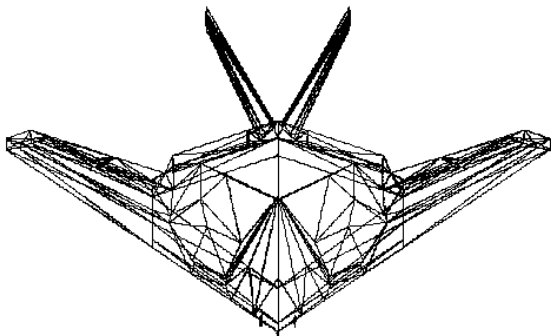


图 3: F117隐形飞机模型

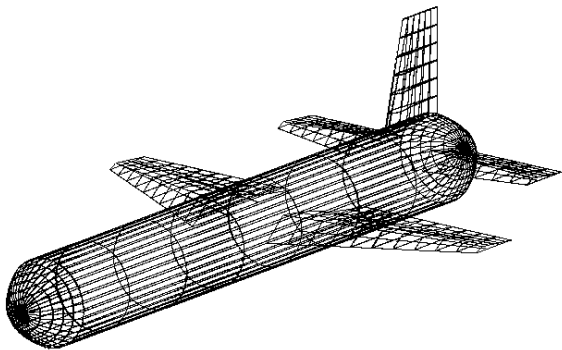


图 4: 导弹模型



课件和参考资料下载

† 课件和参考资料下载地址
<ftp://public.sjtu.edu.cn>

† 用户名: lixg

† 密码: public



课件和参考资料下载

† 课件和参考资料下载地址
<ftp://public.sjtu.edu.cn>

† 用户名: **lixg**

† 密码: public



课件和参考资料下载

† 课件和参考资料下载地址
<ftp://public.sjtu.edu.cn>

† 用户名: lixg

† 密码: public



THANK YOU!

AUTHOR: Xu Guang Li
ADDRESS: Electric Machine and Equipment
Department of Electrical Engineering
School of EIEE
Shanghai Jiao Tong University
Shanghai, 200240, China
EMAIL: *LIXG*SJTU.EDU.CN*